Raízes da Matemática

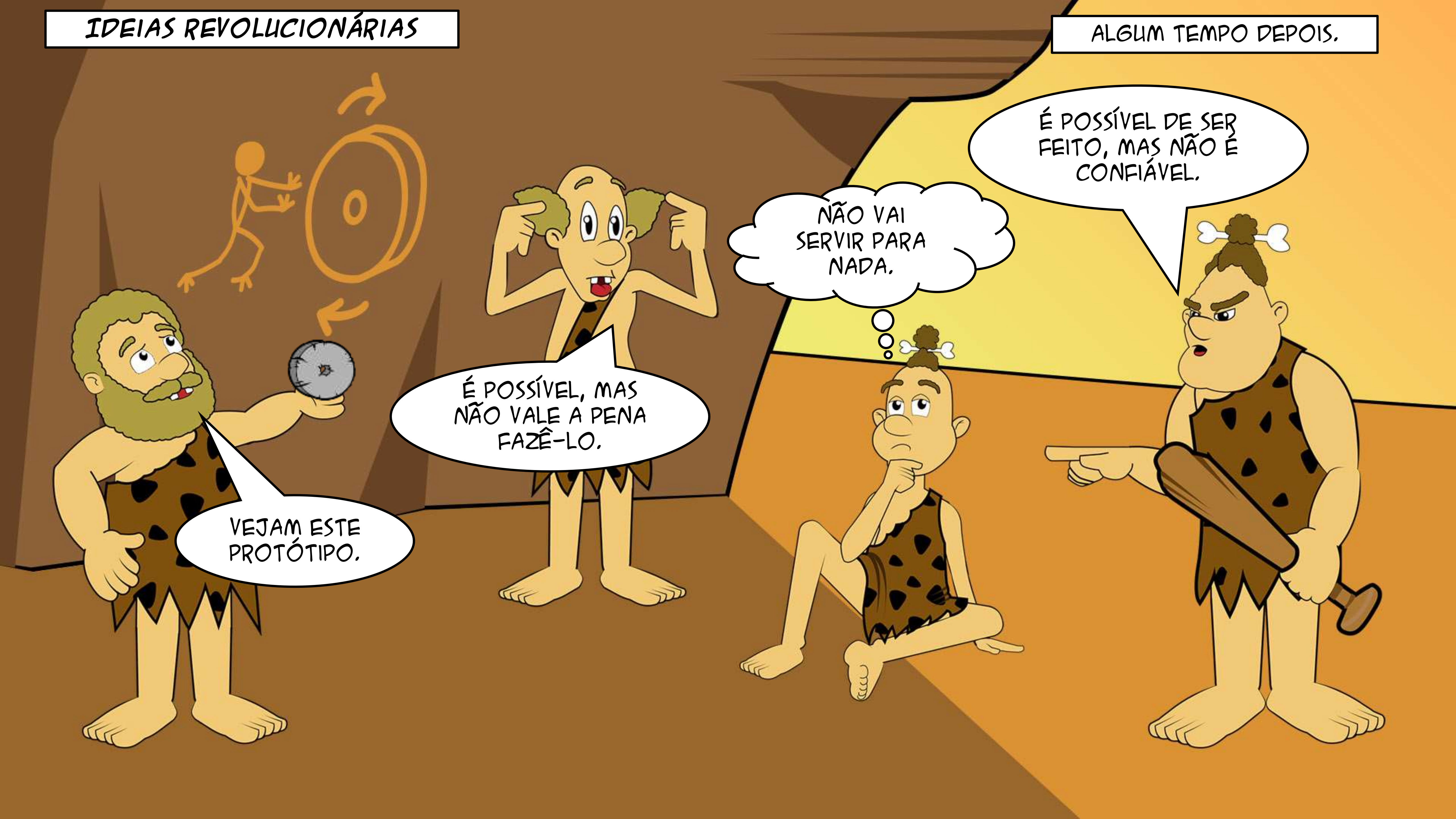
Números Complexos

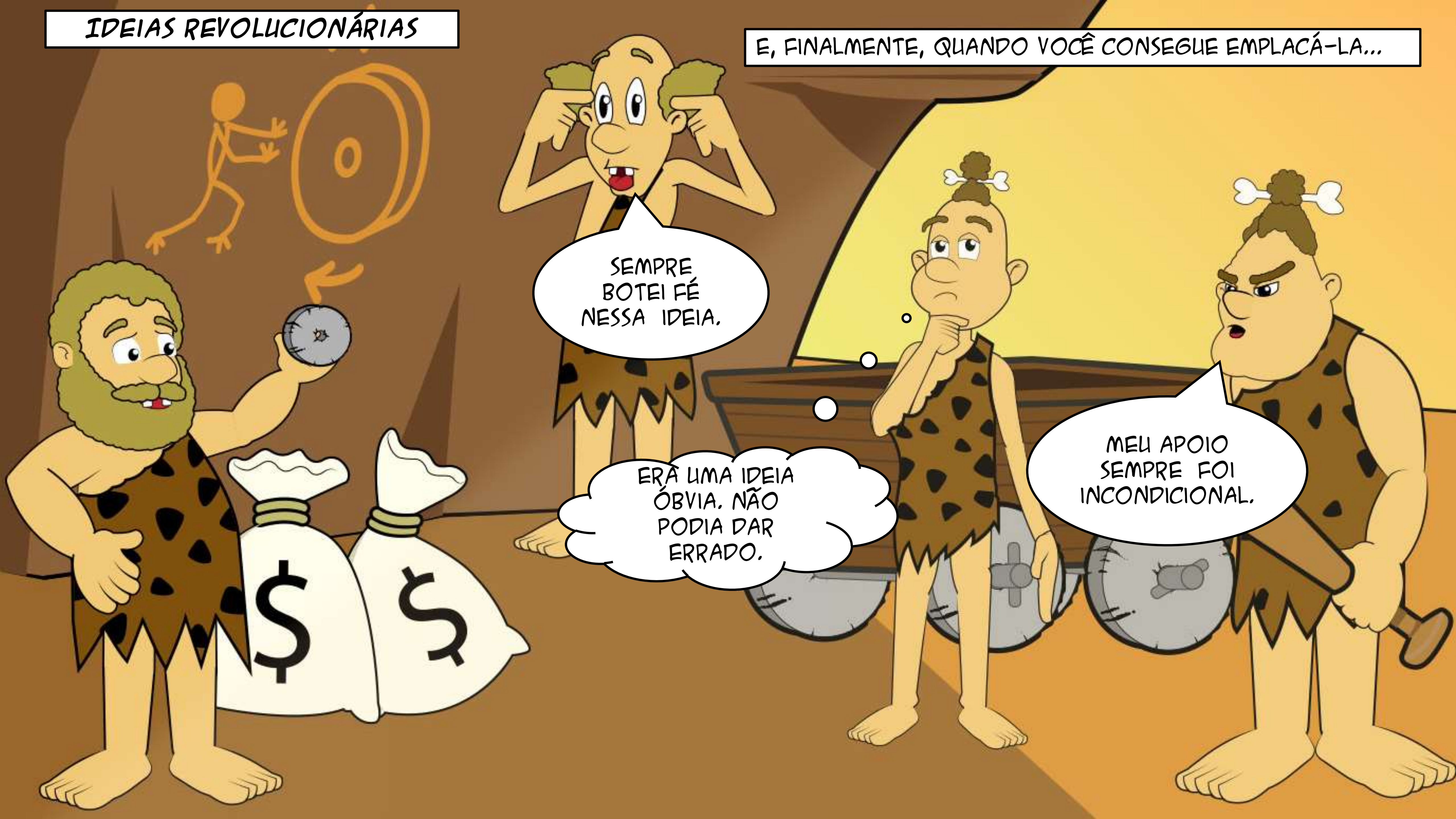
$$i = \sqrt{-1}$$

Um breve resumo da história dos números complexos

ILUSTRAÇÕES: THOMÁS SOARES

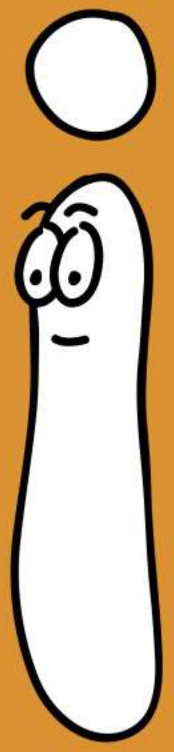

IDEIAS REVOLUCIONÁRIAS
ALGUMAS IDEIAS DEMORAM PARA "PEGAR". QUEM NUNCA TEVE UMA BOA IDEIA QUE SOFREU RESISTÊNCIA E PRECISOU DE UM TEMPO DANADO PARA EMPLACÁ-LA?
ISSO É UMA MALUQUICE. TOTALMENTE IMPOSSÍVEL.
MAIS UMA REUNIÃO INÚTIL.
NÃO DESPERDICE NOSSO TEMPO COM ESSA BOBAGEM.


IDEIAS REVOLUCIONÁRIAS
VEJAM ESTE PROTÓTIPO.
É POSSÍVEL, MAS NÃO VALE A PENA FAZÊ-LO.
NÃO VAI SERVIR PARA NADA.
ALGUM TEMPO DEPOIS.
É POSSÍVEL DE SER FEITO, MAS NÃO É CONFIÁVEL.


IDEIAS REVOLUCIONÁRIAS
E, FINALMENTE, QUANDO VOCÊ CONSEGUE EMPLACÁ-LA...
SEMPRE BOTEI FÉ NESSA IDEIA.
ERA UMA IDEIA ÓBVIA. NÃO PODIA DAR ERRADO.
MEU APOIO SEMPRE FOI INCONDICIONAL.

IDEIAS REVOLUCIONÁRIAS

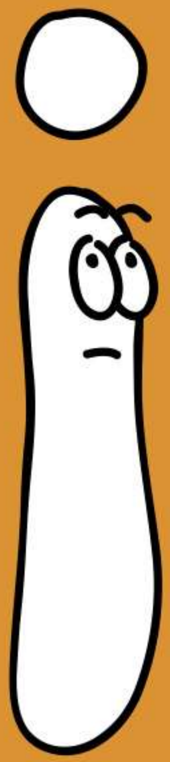
POIS É, COM OS NÚMEROS COMPLEXOS TAMBÉM FOI ASSIM.



IDEIAS REVOLUCIONÁRIAS

POIS É, COM OS NÚMEROS COMPLEXOS TAMBÉM FOI ASSIM.

FORAM NECESSÁRIOS QUASE 3 SÉCULOS PARA QUE ELES FOSSEM COMPREENDIDOS E COMPLETAMENTE ACEITOS PELA COMUNIDADE MATEMÁTICA QUE, MESMO OS USANDO, NÃO ADMITIA A SUA EXISTÊNCIA.

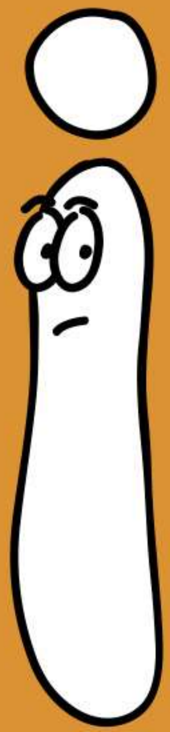


IDEIAS REVOLUCIONÁRIAS

POIS É, COM OS NÚMEROS COMPLEXOS TAMBÉM FOI ASSIM.

FORAM NECESSÁRIOS QUASE 3 SÉCULOS PARA QUE ELES FOSSEM COMPREENDIDOS E COMPLETAMENTE ACEITOS PELA COMUNIDADE MATEMÁTICA QUE, MESMO OS USANDO, NÃO ADMITIA A SUA EXISTÊNCIA.

DURANTE SUA HISTÓRIA ELES FORAM MENOSPREZADOS E CHAMADOS DE SOFÍSTICOS, INÚTEIS, ABSURDOS, INEXPLICÁVEIS, INCOMPREENSÍVEIS, FICTÍCIOS, IMAGINÁRIOS E IMPOSSÍVEIS.

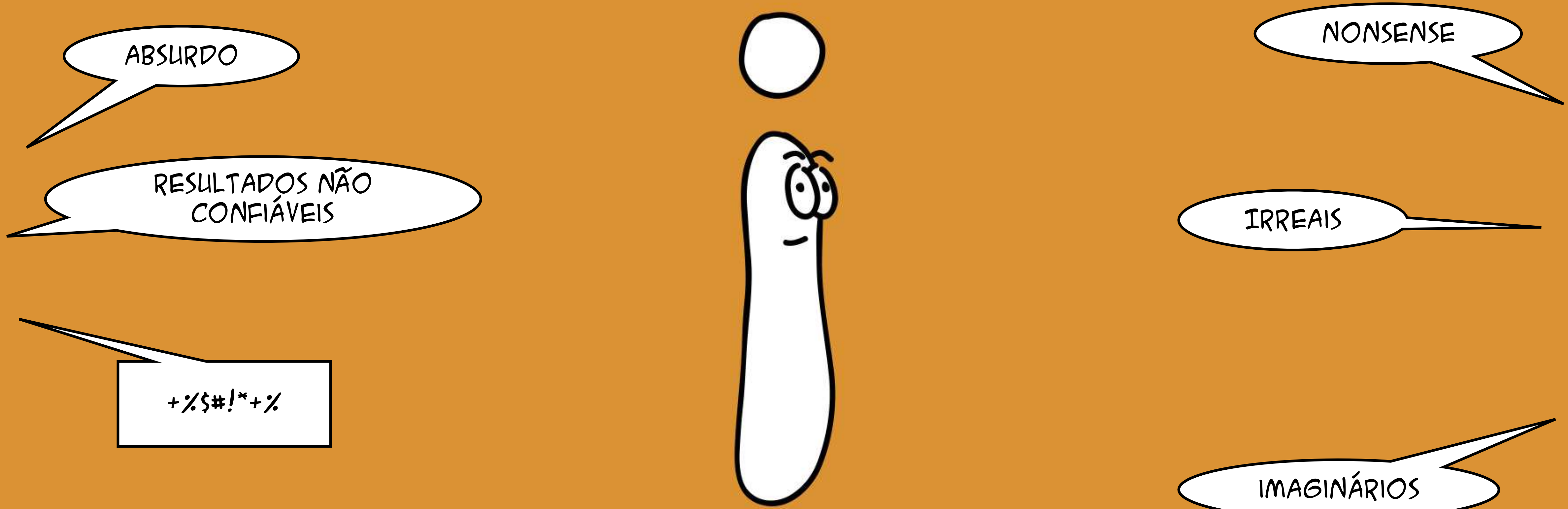


IDEIAS REVOLUCIONÁRIAS

POIS É, COM OS NÚMEROS COMPLEXOS TAMBÉM FOI ASSIM.

FORAM NECESSÁRIOS QUASE 3 SÉCULOS PARA QUE ELES FOSSEM COMPREENDIDOS E COMPLETAMENTE ACEITOS PELA COMUNIDADE MATEMÁTICA QUE, MESMO OS USANDO, NÃO ADMITIA A SUA EXISTÊNCIA.

DURANTE SUA HISTÓRIA ELES FORAM MENOSPREZADOS E CHAMADOS DE SOFÍSTICOS, INÚTEIS, ABSURDOS, INEXPLICÁVEIS, INCOMPREENSÍVEIS, FICTÍCIOS, IMAGINÁRIOS E IMPOSSÍVEIS.



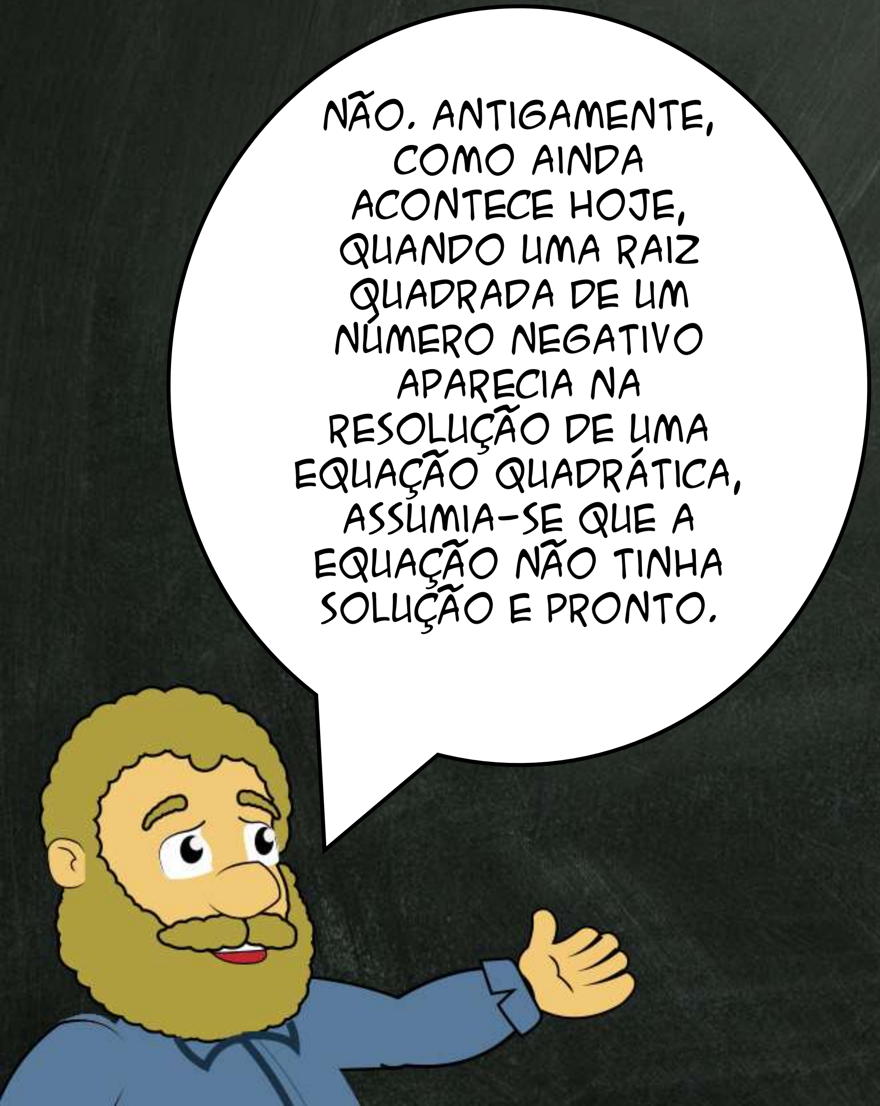

E COMO ELES SURGIRAM?
PERA LÁ. EU SEMPRE ACHEI QUE TIVESSEM SIDO AS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS. NÃO FOI PARA RESOLVER $x^2 + 1 = 0$?
FOI A BUSCA POR UM MÉTODO DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES CÚBICAS QUE LEVOU AO SURGIMENTO SISTEMÁTICO DE RAÍZES QUADRADAS DE NÚMEROS NEGATIVOS E, CONSEQUENTEMENTE, DOS NÚMEROS COMPLEXOS.

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20$$

$$\Delta = -16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = ????$$



* Entenda: Não tem solução no conjunto dos números reais.

SURGIMENTO: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES CÚBICAS

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

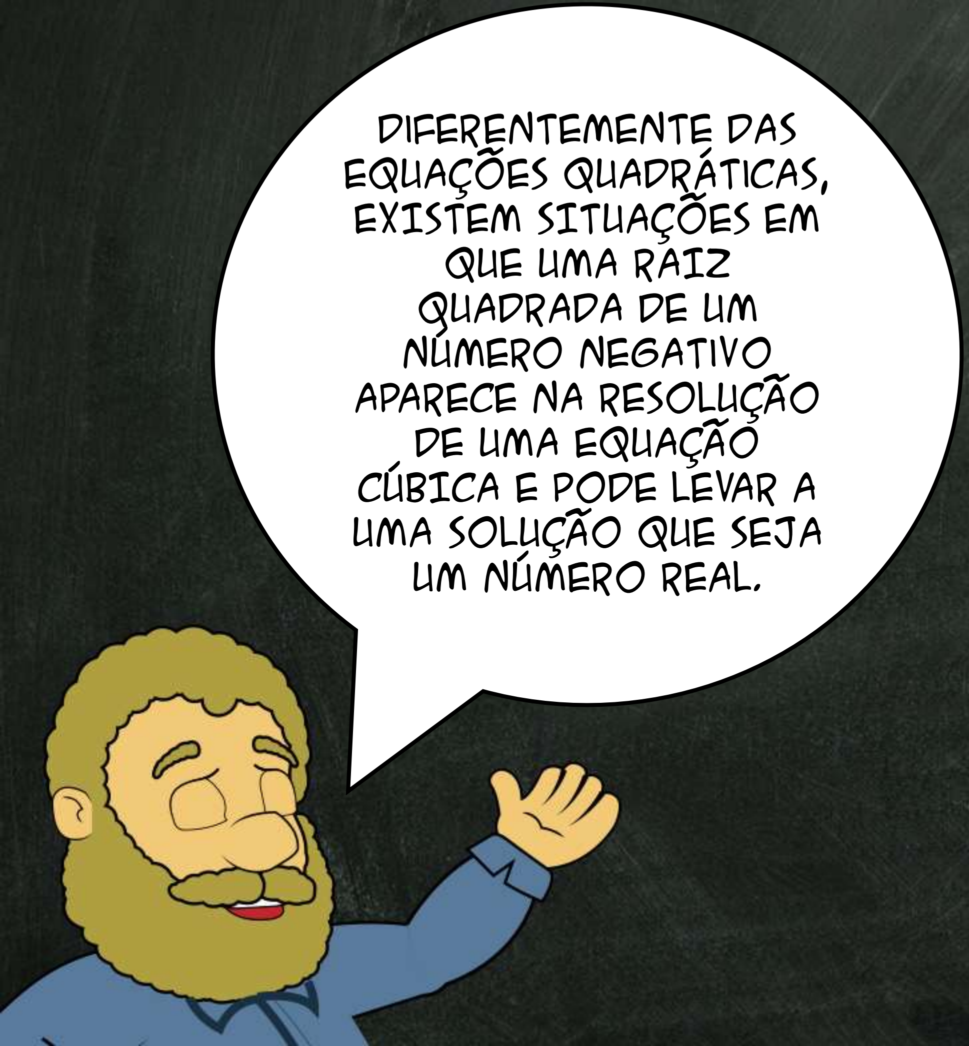
$$\Delta = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3 = 4 - 125$$

$$\Delta = -121$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{-121}}$$

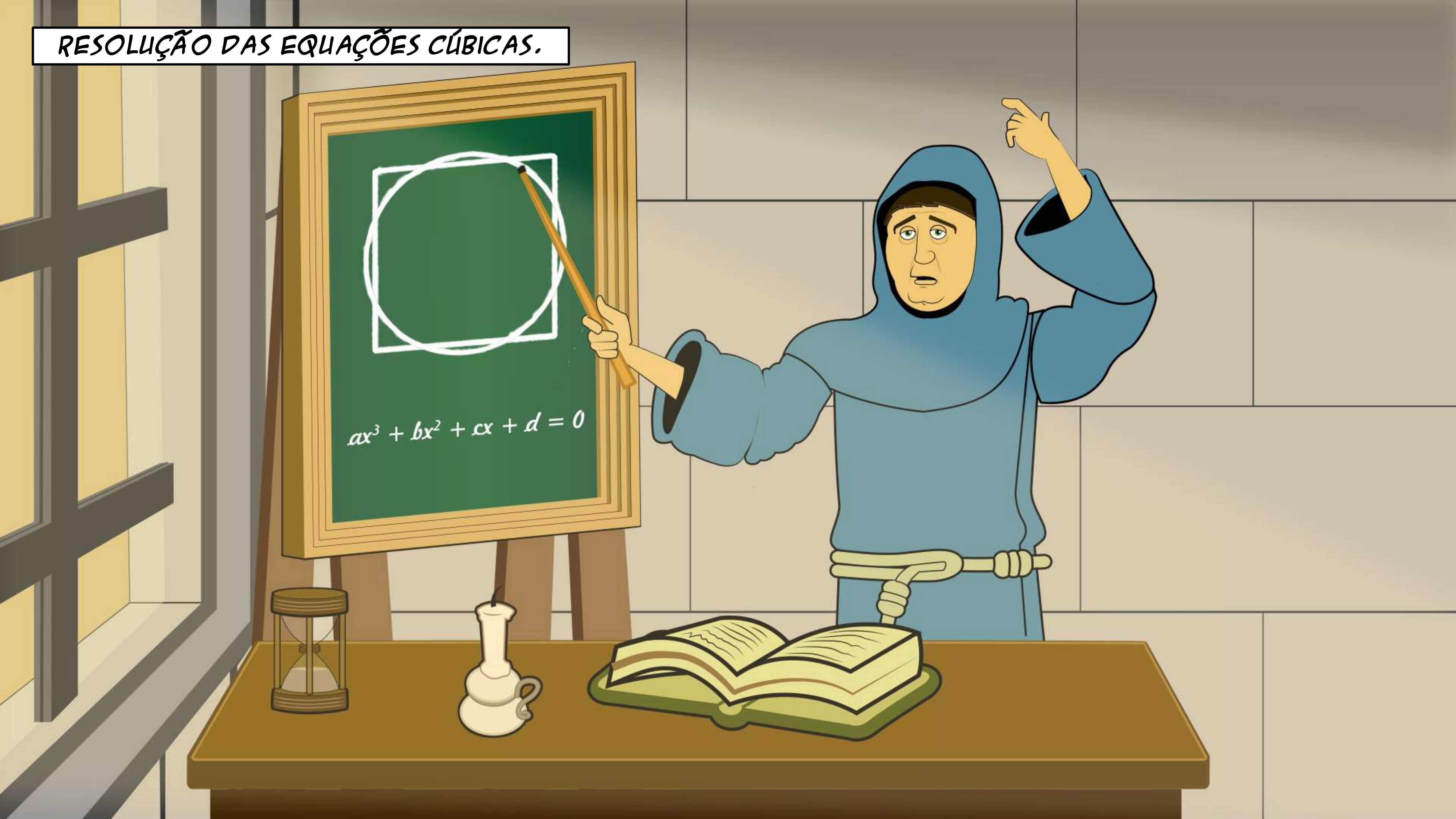
Tem 3 raízes:

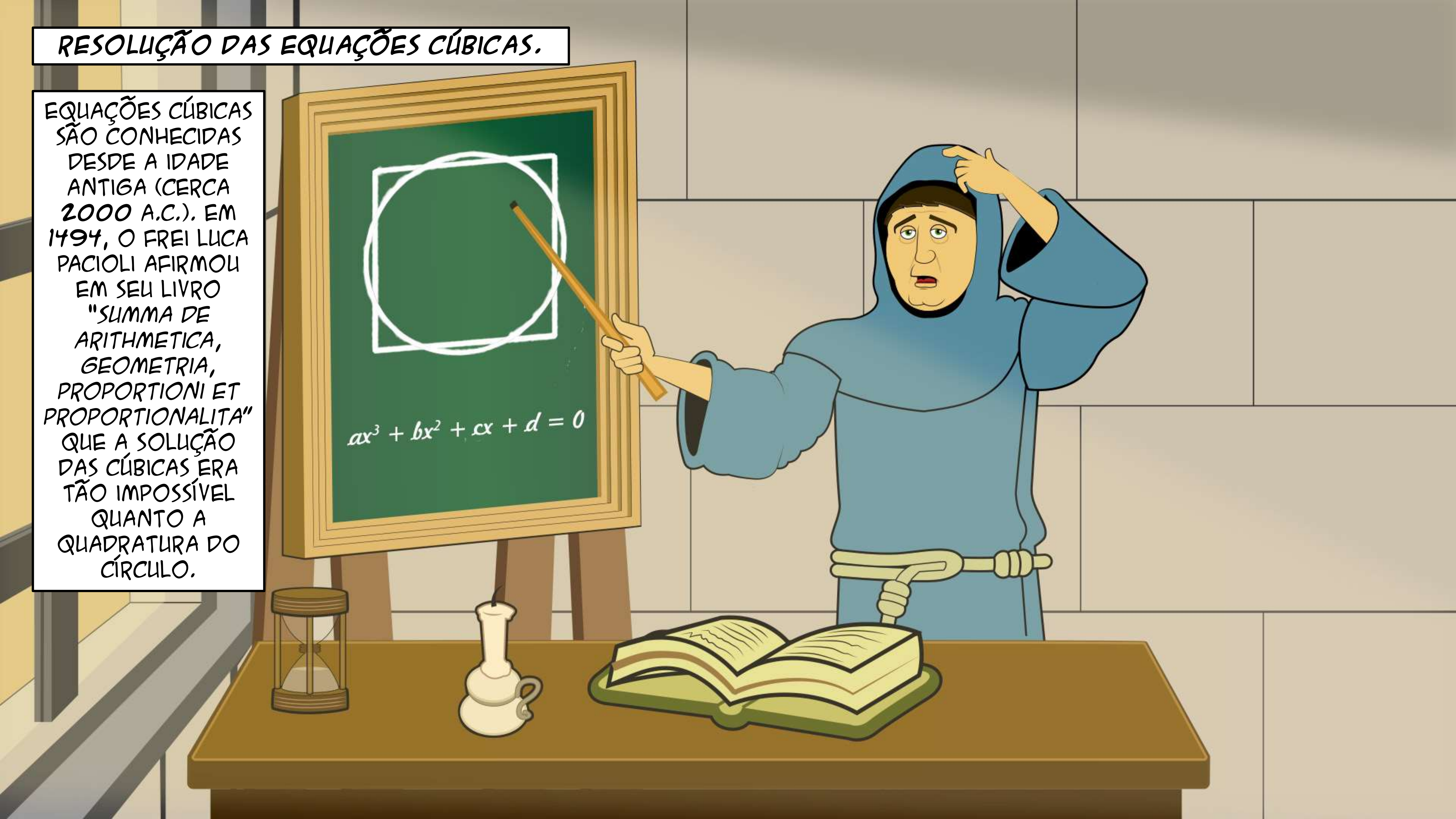
$x = 4$ $\qquad$ $x = -2 + \sqrt{3}$ $\qquad$ $x = -2 - \sqrt{3}$

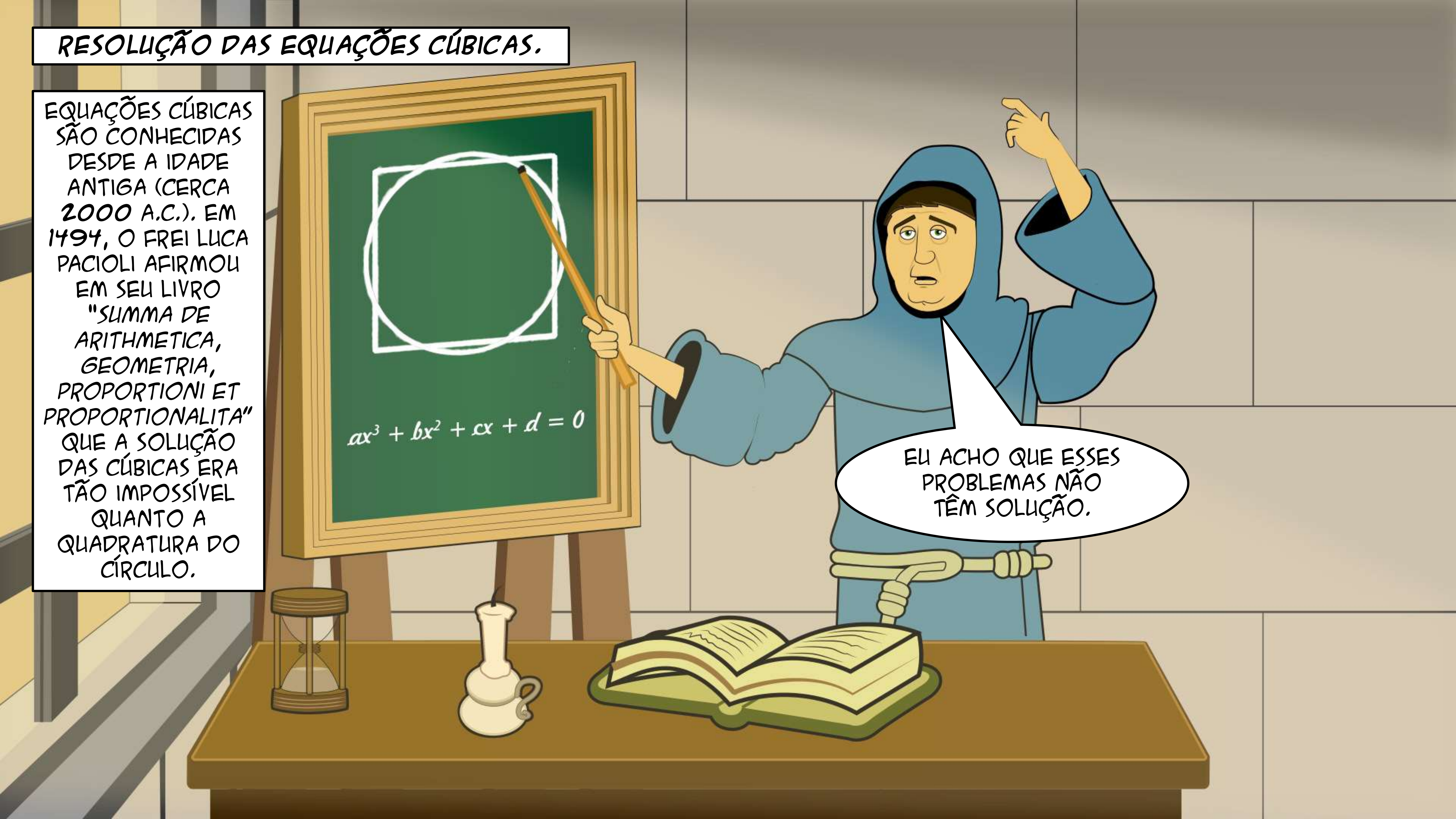


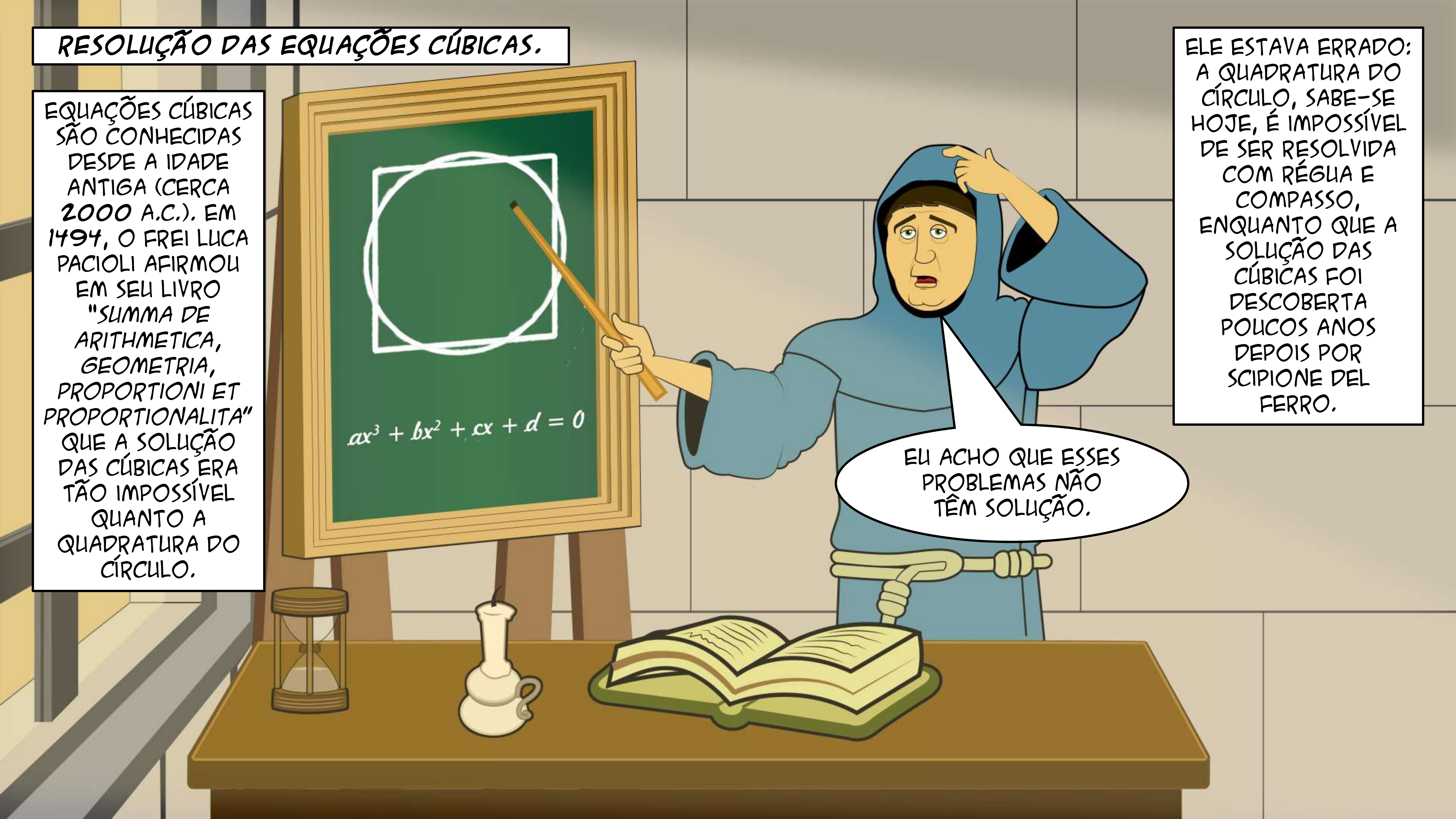
A EQUAÇÃO CÚBICA DESSE EXEMPLO TEM, PORTANTO, TRÊS SOLUÇÕES REAIS.


SURGIMENTO: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES CÚBICAS
ASSIM, AO CONTRÁRIO DO QUE MUITOS ACREDITAM, OS NÚMEROS COMPLEXOS SURGIRAM QUANDO ALGEBRISTAS ITALIANOS ESBARRARAM NAS RAÍZES QUADRADAS DE NÚMEROS NEGATIVOS DE UMA FORMA INDIRETA: NA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE TERCEIRO GRAU (CÚBICAS).
E QUANDO A FORMA DE RESOLVER AS EQUAÇÕES CÚBICAS FOI DESCOBERTA?


RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES CÚBICAS.
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$


RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES CÚBICAS.
EQUAÇÕES CÚBICAS SÃO CONHECIDAS DESDE A IDADE ANTIGA (CERCA 2000 A.C.). EM 1494, O FREI LUCA PACIOLI AFIRMOU EM SEU LIVRO "SUMMA DE ARITHMETICA, GEOMETRIA, PROPORTIONI ET PROPORTIONALITA" QUE A SOLUÇÃO DAS CÚBICAS ERA TÃO IMPOSSÍVEL QUANTO A QUADRATURA DO CÍRCULO.
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

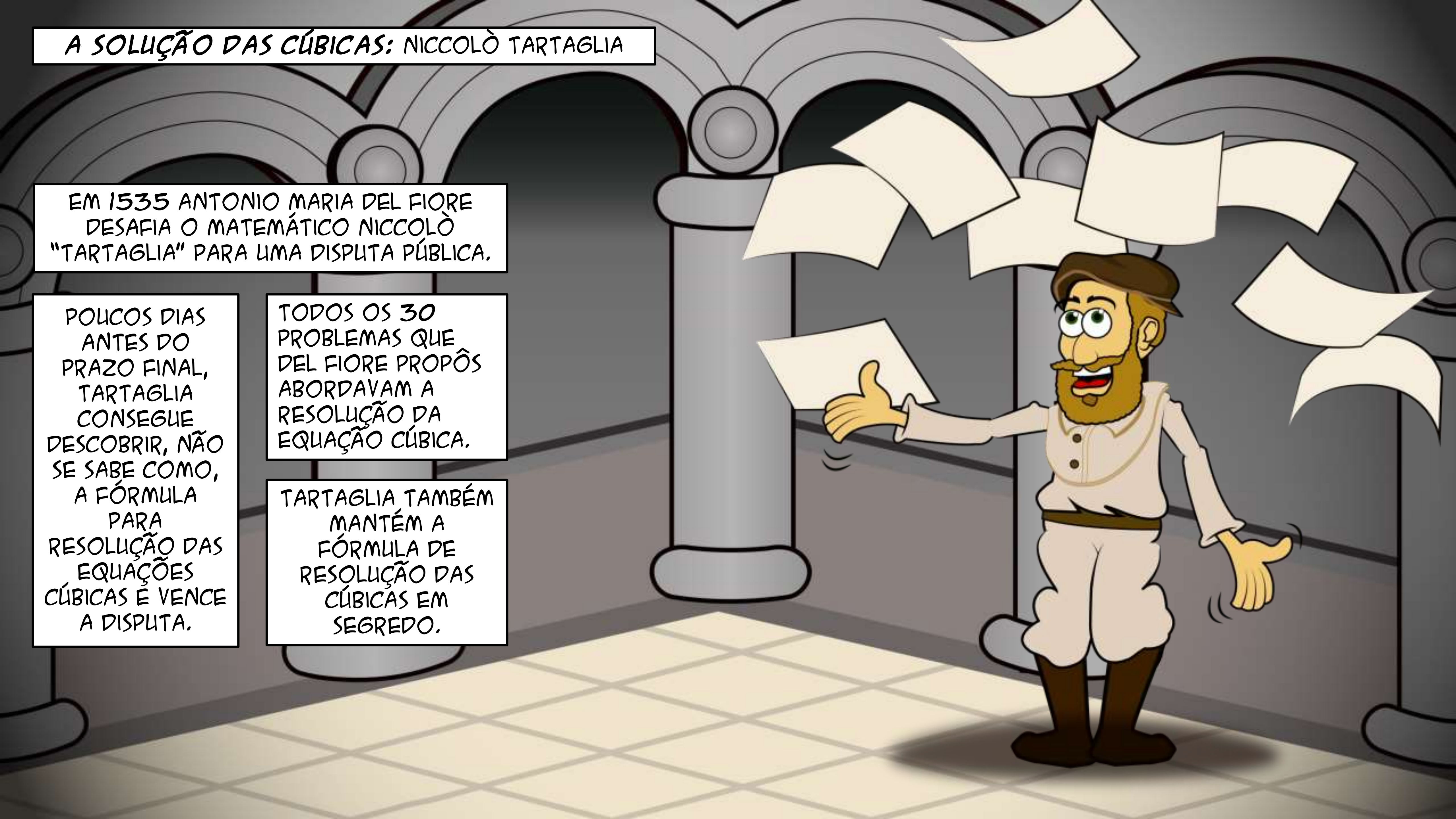

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES CÚBICAS.
EQUAÇÕES CÚBICAS SÃO CONHECIDAS DESDE A IDADE ANTIGA (CERCA 2000 A.C.). EM 1494, O FREI LUCA PACIOLI AFIRMOU EM SEU LIVRO "SUMMA DE ARITHMETICA, GEOMETRIA, PROPORTIONI ET PROPORTIONALITA" QUE A SOLUÇÃO DAS CÚBICAS ERA TÃO IMPOSSÍVEL QUANTO A QUADRATURA DO CÍRCULO.
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
EU ACHO QUE ESSES PROBLEMAS NÃO TÊM SOLUÇÃO.


RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES CÚBICAS.
EQUAÇÕES CÚBICAS SÃO CONHECIDAS DESDE A IDADE ANTIGA (CERCA 2000 A.C.). EM 1494, O FREI LUCA PACIOLI AFIRMOU EM SEU LIVRO "SUMMA DE ARITHMETICA, GEOMETRIA, PROPORTIONI ET PROPORTIONALITA" QUE A SOLUÇÃO DAS CÚBICAS ERA TÃO IMPOSSÍVEL QUANTO A QUADRATURA DO CÍRCULO.
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
EU ACHO QUE ESSES PROBLEMAS NÃO TÊM SOLUÇÃO.
ELE ESTAVA ERRADO: A QUADRATURA DO CÍRCULO, SABE-SE HOJE, É IMPOSSÍVEL DE SER RESOLVIDA COM RÉGUA E COMPASSO, ENQUANTO QUE A SOLUÇÃO DAS CÚBICAS FOI DESCOBERTA POUCOS ANOS DEPOIS POR SCIPIONE DEL FERRO.


A SOLUÇÃO DAS CÚBICAS: SCIPIONE DEL FERRO
SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526), UM PROFESSOR DA UNIVERSIDADE DE BOLOGNA, TALVEZ MOTIVADO PELO DESAFIO LANÇADO PELO FREI LUCA PACIOLI, FOI QUEM DESCOBRIU UMA FORMA ENGENHOSA PARA RESOLVER AS CÚBICAS DA FORMA $x^3+px+q=0$. APARENTEMENTE, ELE NÃO SABIA QUE SEU RESULTADO PODERIA SER GENERALIZADO PARA TODAS AS CÚBICAS $(ax^3+bx^2+cx+d=0)$.
POUCO SE SABE SOBRE COMO FOI FEITA ESSA DESCOBERTA, UMA VEZ QUE ELE NUNCA A PUBLICOU, REVELANDO-A APENAS A ALGUNS ESTUDANTES E AMIGOS PRÓXIMOS.

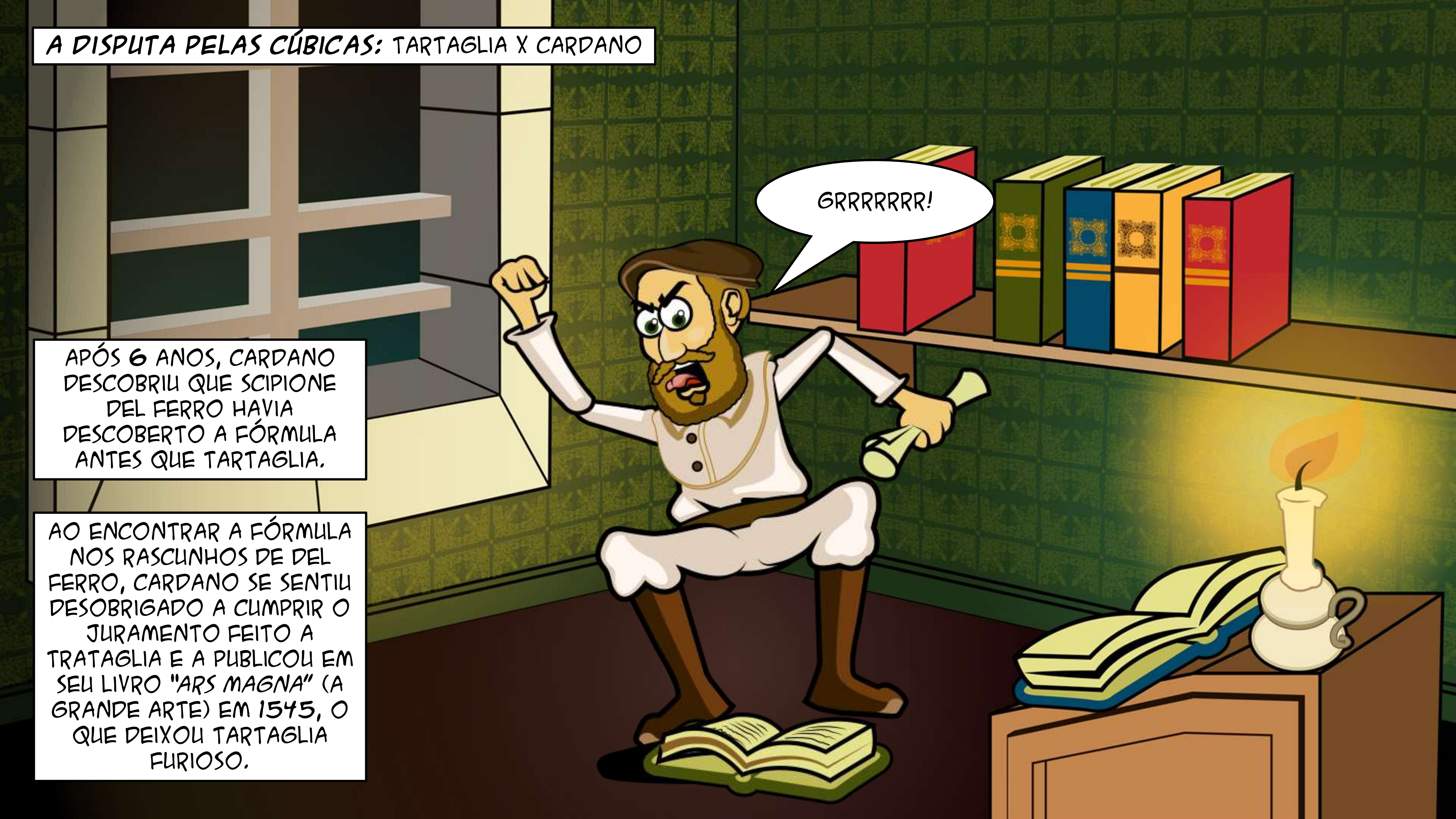

A SOLUÇÃO DAS CÚBICAS: SCIPIONE DEL FERRO
MANTER A FÓRMULA EM SEGREDO, UM COSTUME DA ÉPOCA, PODE TER SIDO UMA ESTRATÉGIA DE DEFESA, POIS OS MATEMÁTICOS COSTUMAVAM SE DESAFIAR PUBLICAMENTE, PROPONDO LISTAS DE PROBLEMAS PARA SEREM RESOLVIDAS, APOSTANDO DINHEIRO OU SUA POSIÇÃO NA UNIVERSIDADE.

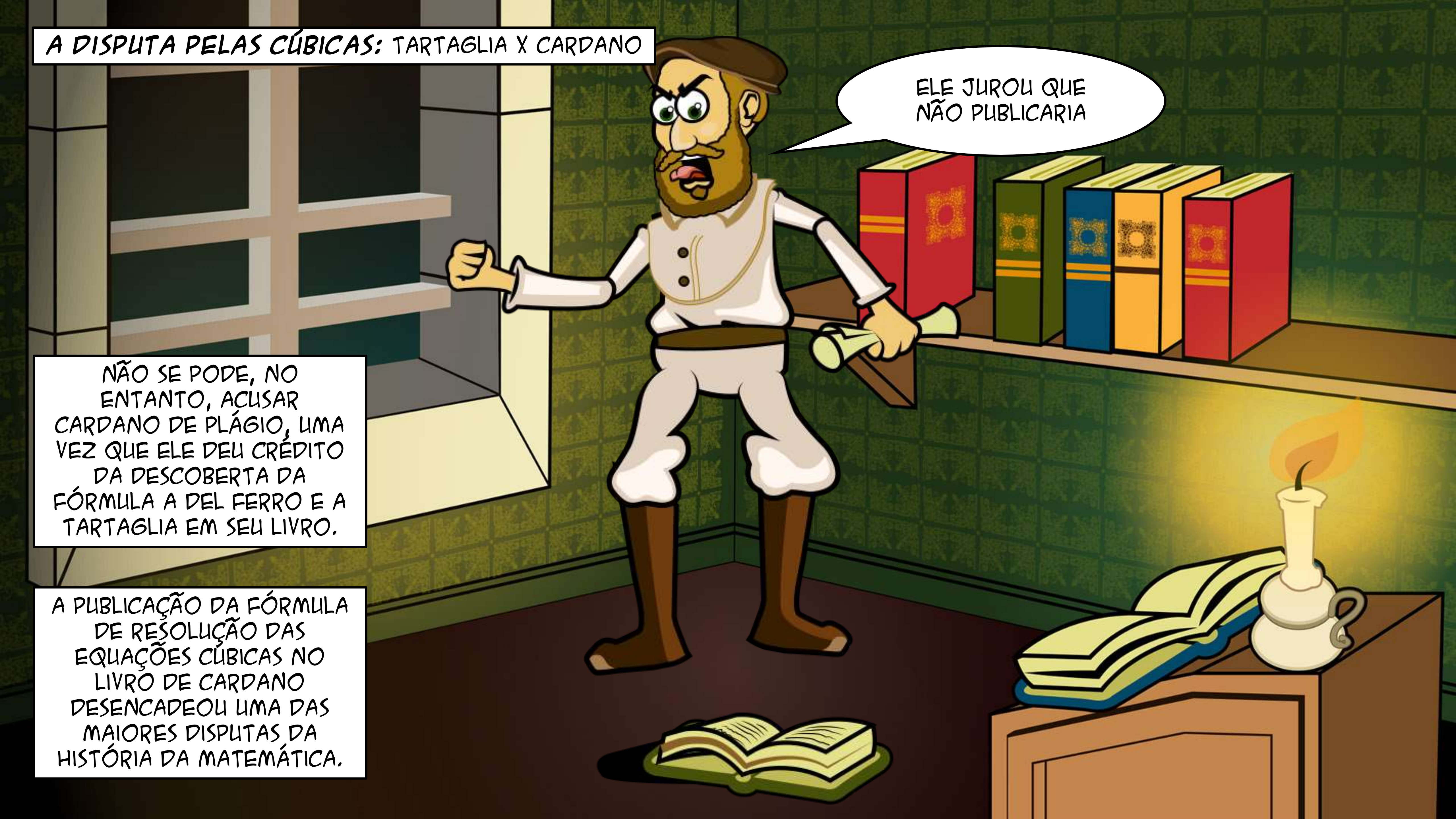

A SOLUÇÃO DAS CÚBICAS: SCIPIONE DEL FERRO
POUCO ANTES DE MORRER, SCIPIONE DEL FERRO CONTA A FÓRMULA DE RESOLUÇÃO PARA UM ESTUDANTE SEU: ANTONIO MARIA DEL FIORE.


A SOLUÇÃO DAS CÚBICAS: NICCOLÒ TARTAGLIA
EM 1535 ANTONIO MARIA DEL FIORE DESAFIA O MATEMÁTICO NICCOLÒ "TARTAGLIA" PARA UMA DISPUTA PÚBLICA.
POUCOS DIAS ANTES DO PRAZO FINAL, TARTAGLIA CONSEGUE DESCOBRIR, NÃO SE SABE COMO, A FÓRMULA PARA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES CÚBICAS E VENCE A DISPUTA.
TODOS OS 30 PROBLEMAS QUE DEL FIORE PROPÔS ABORDAVAM A RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO CÚBICA.
TARTAGLIA TAMBÉM MANTÉM A FÓRMULA DE RESOLUÇÃO DAS CÚBICAS EM SEGREDO.


A SOLUÇÃO DAS CÚBICAS: CARDANO
A NOTÍCIA QUE TARTAGLIA TINHA VENCIDO A DISPUTA COM DEL FIORE E QUE TINHA UMA FÓRMULA PARA RESOLUÇÃO DAS CÚBICAS CHEGOU AO CONHECIMENTO DE GEROLAMO CARDANO (1501-1576) QUE ESTAVA PREPARANDO UM LIVRO QUE PRETENDIA SINTETIZAR TODO O CONHECIMENTO ALGÉBRICO EXISTENTE ATÉ ENTÃO.
ME DÁ ESSA FÓRMULA.
EM 1539 CARDANO CONVIDOU TARTAGLIA A VISITÁ-LO EM MILÃO E O PERSUADIU A CONTAR-LHE A FÓRMULA DE RESOLUÇÃO DAS CÚBICAS.


A SOLUÇÃO DAS CÚBICAS: TARTAGLIA E CARDANO
EU JURO QUE NÃO PUBLICO.
TARTAGLIA FORNECEU A FÓRMULA, MAS NÃO A DEMONSTROU, EXIGINDO QUE CARDANO JURASSE QUE NÃO A PUBLICARIA E QUE A MANTERIA CRIPTOGRAFADA PARA QUE NINGUÉM A DECIFRASSE.
A FÓRMULA FOI PASSADA A CARDANO NA FORMA DE UM POEMA.


A DISPUTA PELAS CÚBICAS: TARTAGLIA X CARDANO
APÓS 6 ANOS, CARDANO DESCOBRIU QUE SCIPIONE DEL FERRO HAVIA DESCOBERTO A FÓRMULA ANTES QUE TARTAGLIA.
AO ENCONTRAR A FÓRMULA NOS RASCUNHOS DE DEL FERRO, CARDANO SE SENTIU DESOBRIGADO A CUMPRIR O JURAMENTO FEITO A TRATAGLIA E A PUBLICOU EM SEU LIVRO "ARS MAGNA" (A GRANDE ARTE) EM 1545, O QUE DEIXOU TARTAGLIA FURIOSO.
GRRRRRRR!


A DISPUTA PELAS CÚBICAS: TARTAGLIA X CARDANO
ELE JUROU QUE NÃO PUBLICARIA
NÃO SE PODE, NO ENTANTO, ACUSAR CARDANO DE PLÁGIO, UMA VEZ QUE ELE DEU CRÉDITO DA DESCOBERTA DA FÓRMULA A DEL FERRO E A TARTAGLIA EM SEU LIVRO.
A PUBLICAÇÃO DA FÓRMULA DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES CÚBICAS NO LIVRO DE CARDANO DESENCADEOU UMA DAS MAIORES DISPUTAS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.


A SOLUÇÃO DAS CÚBICAS É, ENFIM, PUBLICADA: ARS MAGNA
QUE SUCESSO!
HIERONYMI CAR
ARTIS MAGNÆ
ARS MAGNA FOI UM MARCO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, SENDO CONSIDERADO A MAIOR REALIZAÇÃO NO CAMPO DA ÁLGEBRA DESDE QUE OS BABILÔNIOS ESTABELECERAM COMO RESOLVER AS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS 3000 ANOS ANTES.
NESSE LIVRO, CARDANO ALÉM DE DESCREVER, DEMONSTRAR E GENERALIZAR O MÉTODO ALGÉBRICO PARA RESOLVER AS EQUAÇÕES CÚBICAS, INCLUIU TAMBÉM O MÉTODO PARA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES QUÁRTICAS QUE FOI OBTIDO POR UM ALUNO SEU, LUDOVICO FERRARI.

ARS MAGNA

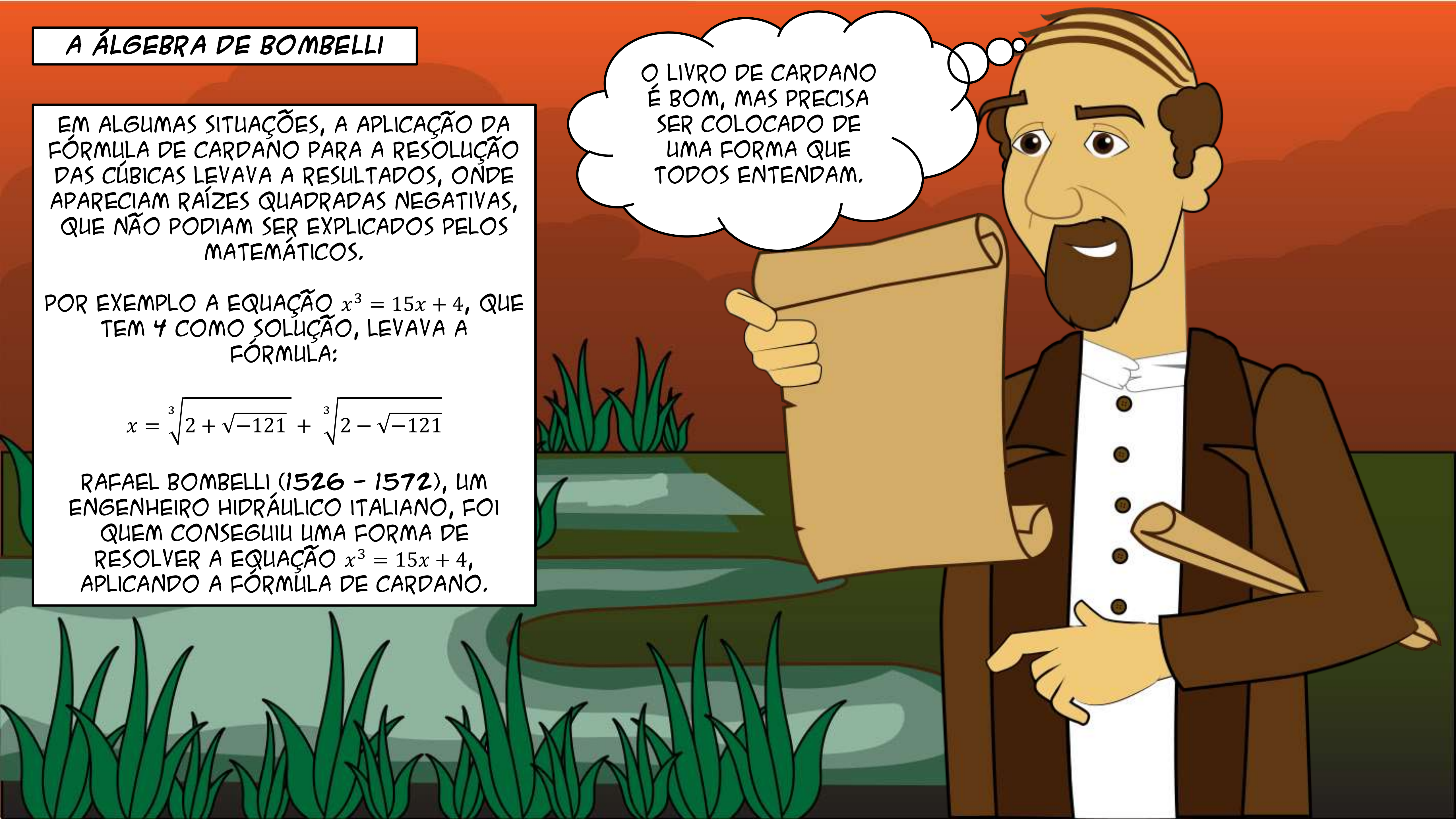
EM NOTAÇÃO ATUAL, A FÓRMULA DE CARDANO PARA A RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO CÚBICA DA FORMA $x^3 + px + q = 0$ É:

$$x = u + v$$

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$com\ uv = -\frac{p}{3}$$


ARS MAGNA
EM SEU LIVRO, NO ENTANTO, CARDANO AINDA CHAMA AS RAÍZES NEGATIVAS QUANDO APARECEM DE INÚTEIS E TORTURA MENTAL.
ESSA SUTILEZA ARITMÉTICA É TÃO REFINADA QUANTO INÚTIL.
ESQUEÇA A TORTURA MENTAL QUE ISSO SIGNIFICA E VÁ OPERANDO...
HIERONYMI CAR
ARTIS MAGNÆ


A ÁLGEBRA DE BOMBELLI
EM ALGUMAS SITUAÇÕES, A APLICAÇÃO DA FÓRMULA DE CARDANO PARA A RESOLUÇÃO DAS CÚBICAS LEVAVA A RESULTADOS, ONDE APARECIAM RAÍZES QUADRADAS NEGATIVAS, QUE NÃO PODIAM SER EXPLICADOS PELOS MATEMÁTICOS.
POR EXEMPLO A EQUAÇÃO $x^3 = 15x + 4$, QUE TEM 4 COMO SOLUÇÃO, LEVAVA A FÓRMULA:
$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$
RAFAEL BOMBELLI (1526 - 1572), UM ENGENHEIRO HIDRÁULICO ITALIANO, FOI QUEM CONSEGUIU UMA FORMA DE RESOLVER A EQUAÇÃO $x^3 = 15x + 4$, APLICANDO A FÓRMULA DE CARDANO.
O LIVRO DE CARDANO É BOM, MAS PRECISA SER COLOCADO DE UMA FORMA QUE TODOS ENTENDAM.


A ÁLGEBRA DE BOMBELLI
PARA RESOLVÊ-LA, BOMBELLI SUPÔS QUE A SOLUÇÃO DEVERIA SER DA FORMA $a+\sqrt{-b}$ E $a-\sqrt{-b}$; E DESENVOLVEU REGRAS PARA OPERAR COM AS RAÍZES NEGATIVAS, ESTABELECENDO UMA ÁLGEBRA PARA OS NÚMEROS COMPLEXOS.
APLICANDO MANIPULAÇÕES ALGÉBRICAS, DE ACORDO COM AS REGRAS ESTABELECIDAS PARA OS NÚMEROS REAIS, CHEGOU A:
$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$
E, PORTANTO,
$$2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4$$
TIVE QUE USAR AQUI UM RACIOCÍNIO MAIS RUDE.

A ÁLGEBRA DE BOMBELLI

SEUS RESULTADOS FORAM PUBLICADOS NO LIVRO "L'ÁLGEBRA" EM 1572.

DE CERTA FORMA, BOMBELLI PODE SER CONSIDERADO O "INVENTOR" DOS NÚMEROS COMPLEXOS: FOI O PRIMEIRO A MOSTRAR COMO OPERAR COM ELES E QUE ESTES PODERIAM SER ÚTEIS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.

EM NOTAÇÃO ATUAL, A SUA ÁLGEBRA ESTABELECE:

$$\sqrt{-n}\,\sqrt{-n} = -n$$

$$\sqrt{-n}\,(-\sqrt{-n}) = n$$

$$(-\sqrt{-n})\,\sqrt{-n} = n$$

$$(-\sqrt{-n})(-\sqrt{-n}) = -n$$


MAIS RESISTÊNCIA PARA ACEITÁ-LOS
APESAR DA ÁLGEBRA DE BOMBELLI, OS MATEMÁTICOS NÃO ACEITARAM OS NÚMEROS COMPLEXOS IMEDIATAMENTE.
RENÉ DESCARTES (1596-1650), EM TOM DEPRECIATIVO, OS CHAMOU DE IMAGINÁRIOS PARA CONTRASTÁ-LOS COM OS NÚMEROS REALMENTE ÚTEIS, OS REAIS.
ESSE TERMO PEGOU.
ARGH. SÃO APENAS IMPOSSIBILIDADES GEOMÉTRICAS, SOLUÇÕES IMAGINÁRIAS.

AS ORIGENS DO TFA: ALBERT GIRARD

EM 1629 ALBERT GIRARD (1595 – 1632) NO LIVRO "NOVAS DESCOBERTAS NA ÁLGEBRA" LANÇA AS BASES DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA (TFA) AO ADMITIR (SEM DEMONSTRAR) QUE UMA EQUAÇÃO DE GRAU N TEM N RAÍZES (NEM TODAS REAIS).

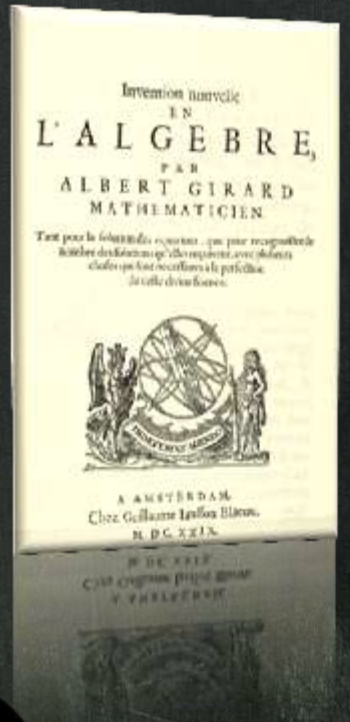
CHAMOU AS SOLUÇÕES IMAGINÁRIAS DE IMPOSSÍVEIS.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

TODA EQUAÇÃO 1º GRAU TEM UMA SOLUÇÃO.
TODA EQUAÇÃO QUADRÁTICA TEM DUAS SOLUÇÕES.
TODA EQUAÇÃO CÚBICA TEM TRÊS SOLUÇÕES.
TODA EQUAÇÃO QUÁRTICA TEM QUATRO SOLUÇÕES.

...

TODA EQUAÇÃO DE GRAU N DEVE TER N SOLUÇÕES.



AS ORIGENS DO TFA: DESCARTES

EM 1637 EM "LA GEOMETRIE" DESCARTES AFIRMA QUE EMBORA N RAÍZES ESTEJAM ASSOCIADAS A UMA EQUAÇÃO DE GRAU N, NEM SEMPRE SE PODE ESPERAR QUE TODAS SEJAM REAIS, SENDO QUE ALGUMAS VEZES SÃO SOMENTE IMAGINÁRIAS.


LEIBNIZ E JOHANN BERNOULLI: ESTUDANDO OS NÚMEROS COMPLEXOS
EMBORA MUITOS MATEMÁTICOS NÃO APRECIASSEM A IDEIA DOS NÚMEROS IMAGINÁRIOS, NÃO FOI POSSÍVEL IMPEDIR QUE MUITOS OUTROS ACREDITASSEM QUE A $\sqrt{-1}$ DEVERIA SER CONSIDERADA SERIAMENTE E QUE COMEÇASSEM A ESTUDÁ-LA. GOTTFRIED LEIBNIZ (1646-1716) E JOHANN BERNOULLI (1667-1748), POR EXEMPLO, OS USARAM COMO UM ARTIFÍCIO AUXILIAR NO CÁLCULO DE DETERMINADAS INTEGRAIS.
BERNOULLI
LEIBNIZ
O ESPÍRITO EXPRESSOU-SE SUBLIMEMENTE NESTA MARAVILHA DA ANÁLISE, NESTE PORTENTO DO MUNDO DAS IDEIAS, ESTE ANFÍBIO ENTRE O SER E O NÃO SER, QUE CHAMAMOS DE RAIZ IMAGINÁRIA DA UNIDADE NEGATIVA.


LEIBNIZ E JOHANN BERNOULLI: ESTUDANDO OS NÚMEROS COMPLEXOS
BERNOULLI
TENTANDO RESOLVER UM PROBLEMA, LEIBNIZ E BERNOULLI PRECISARAM DETERMINAR O LOGARITMO DE UM NÚMERO COMPLEXO. POR VOLTA DE 1712, ELES ESTAVAM TENTANDO COMPREENDER O QUE É O LOGARITMO DE UM NÚMERO NEGATIVO. SE ELES PUDESSEM RESOLVER ISSO, PODERIAM DETERMINAR O LOGARITMO DE QUALQUER NÚMERO COMPLEXO, POIS O LOGARITMO DA RAIZ QUADRADA DE UM NÚMERO É A METADE DO LOGARITMO DESSE NÚMERO.
LEIBNIZ
DE ACORDO COM OS MEUS CÁLCULOS, O LOGARITMO DE -1 É UM NÚMERO REAL.
NÃO, O LOGARITMO DE -1 É IMAGINÁRIO!


LEIBNIZ E JOHANN BERNOULLI: ESTUDANDO OS NÚMEROS COMPLEXOS
BERNOULLI
DE ACORDO COM OS MEUS CÁLCULOS, O LOGARITMO DE −1 É UM NÚMERO REAL.
LEIBNIZ
NÃO, O LOGARITMO DE −1 É IMAGINÁRIO!
ESSA CONTROVÉRSIA SÓ FOI RESOLVIDA MUITO TEMPO DEPOIS, EM 1749, COM UM TRABALHO DE LEONHARD EULER (1707 - 1783) QUE CONCLUIU QUE O LOGARITMO DE −1 É UM NÚMERO IMAGINÁRIO. LEIBNIZ ESTAVA CERTO.


EULER: A EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS
PARA CHEGAR A ESSES RESULTADOS, EULER INVESTIGOU A FUNDO AS OPERAÇÕES COM OS NÚMEROS COMPLEXOS, INCLUINDO POTENCIAÇÃO, RADICIAÇÃO, LOGARITMOS E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM ARGUMENTOS COMPLEXOS.
AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO E A FUNÇÃO EXPONENCIAL NÃO PARECEM TER NADA EM COMUM. NO ENTANTO, EULER DEDUZIU UMA FÓRMULA QUE RELACIONA ESSAS FUNÇÕES COM A INTRODUÇÃO DA UNIDADE IMAGINÁRIA:
$e^{ix} = cosx + i\ sen\ x$ (FÓRMULA DE EULER)

EULER: A EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

EM $x = \pi$, A FÓRMULA DE EULER LEVA A:

$e^{i\pi} + 1 = 0$ (IDENTIDADE DE EULER)

A IDENTIDADE DE EULER TEM CINCO DOS NÚMEROS MAIS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA $(0, 1, e, i, \pi)$ E TRÊS OPERAÇÕES BÁSICAS DA ARITMÉTICA (ADIÇÃO, MULTIPLICAÇÃO E POTENCIAÇÃO).

POR ESSAS CARACTERÍSTICAS, ELA É CONSIDERADA A EQUAÇÃO MAIS BELA DA MATEMÁTICA POR MUITOS CIENTISTAS.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$


EULER: A EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS
E OLHA QUE A MAIOR PARTE DA MINHA OBRA FOI ESCRITA COM UMA CRIANÇA NO COLO.
COM EULER, OS ESTUDOS SOBRE OS NÚMEROS COMPLEXOS ALCANÇARAM UM OUTRO NÍVEL, ALAVANCANDO A PESQUISA SOBRE O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA (TFA).
EM SEU LIVRO "*TRATADO SOBRE AS RAÍZES IMAGINÁRIAS DE UMA EQUAÇÃO*", EULER MOSTROU QUE SE $\mathrm{a}+\sqrt{-1}$ É RAIZ DE UMA EQUAÇÃO, ENTÃO $\mathrm{a}-\sqrt{-1}$ TAMBÉM O É.
MOSTROU TAMBÉM QUE TODA EQUAÇÃO DE GRAU ÍMPAR TEM PELO MENOS UMA RAIZ REAL E QUE TODAS AS RAÍZES NÃO REAIS SÃO DA FORMA $\mathrm{a}+b\sqrt{-1}$.

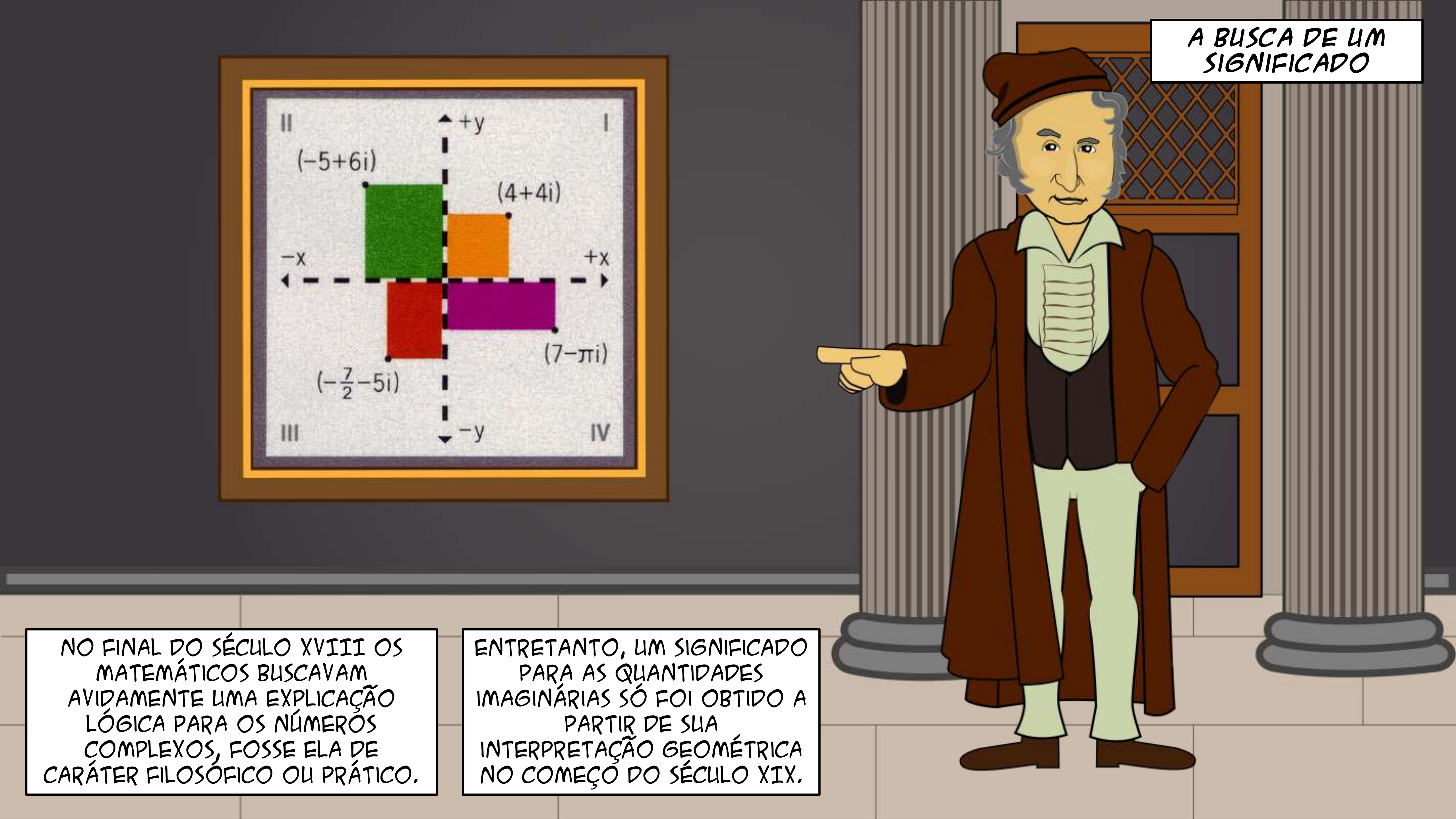
A DEMONSTRAÇÃO DO TFA

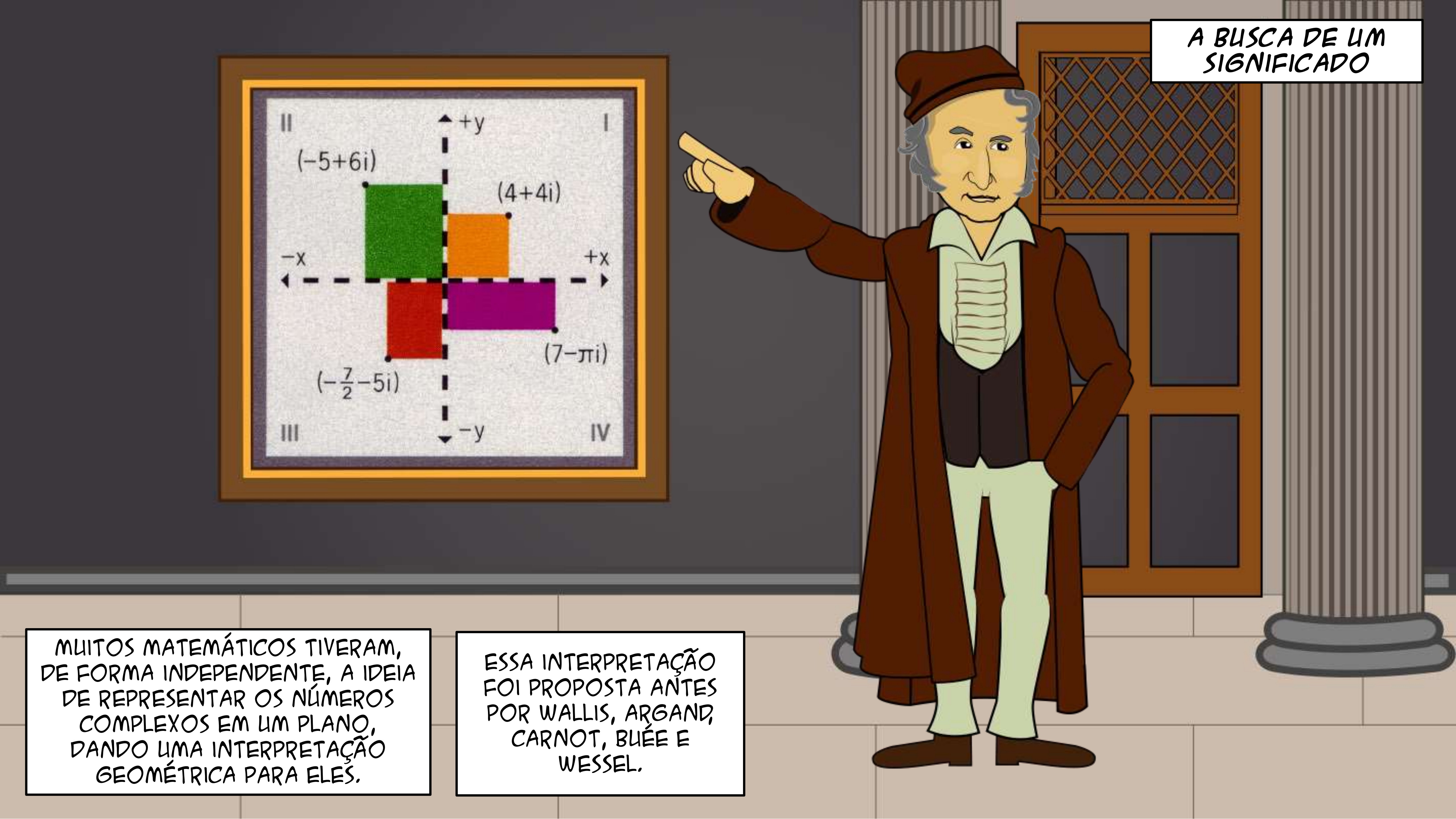
NO ENTANTO, EULER NÃO CONSEGUIU DEMONSTRAR O TFA.

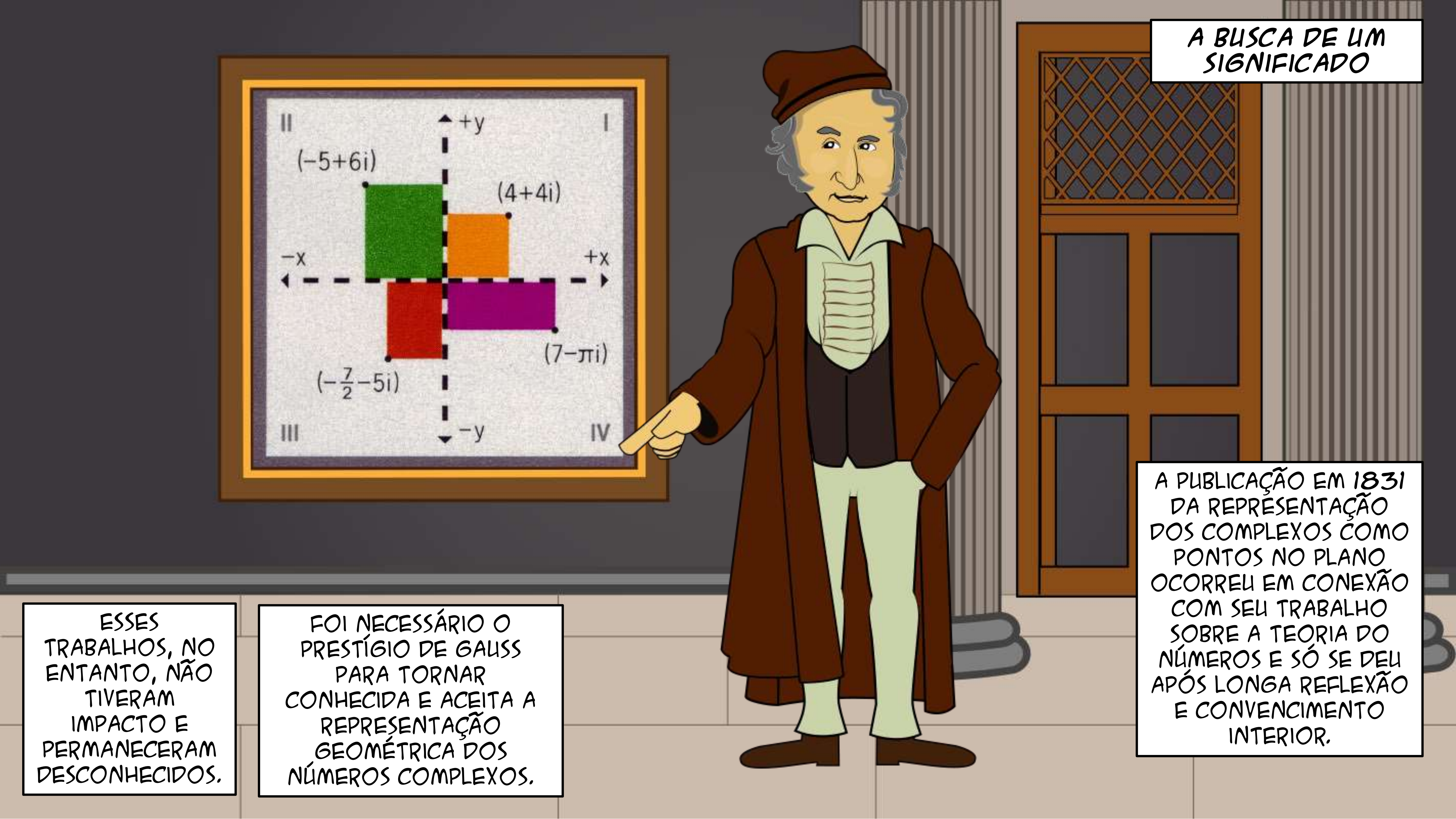
AQUELA QUE É CONSIDERADA A PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO CORRETA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA FOI FEITA POR CARL GAUSS (1777 - 1855) EM 1799 EM SUA TESE DE DOUTORADO.

ANTES DISSO, NO ENTANTO, O TFA JÁ ERA UTILIZADO AMPLAMENTE NO MEIO ACADÊMICO.

AO LONGO DE SUA VIDA, GAUSS FEZ OUTRAS TRÊS DEMONSTRAÇÕES DIFERENTES DO TFA.


A BUSCA DE UM SIGNIFICADO
II
I
III
IV
+y
−y
−x
+x
(−5+6i)
(4+4i)
(7−πi)
(−7/2−5i)
NO FINAL DO SÉCULO XVIII OS MATEMÁTICOS BUSCAVAM AVIDAMENTE UMA EXPLICAÇÃO LÓGICA PARA OS NÚMEROS COMPLEXOS, FOSSE ELA DE CARÁTER FILOSÓFICO OU PRÁTICO.
ENTRETANTO, UM SIGNIFICADO PARA AS QUANTIDADES IMAGINÁRIAS SÓ FOI OBTIDO A PARTIR DE SUA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA NO COMEÇO DO SÉCULO XIX.

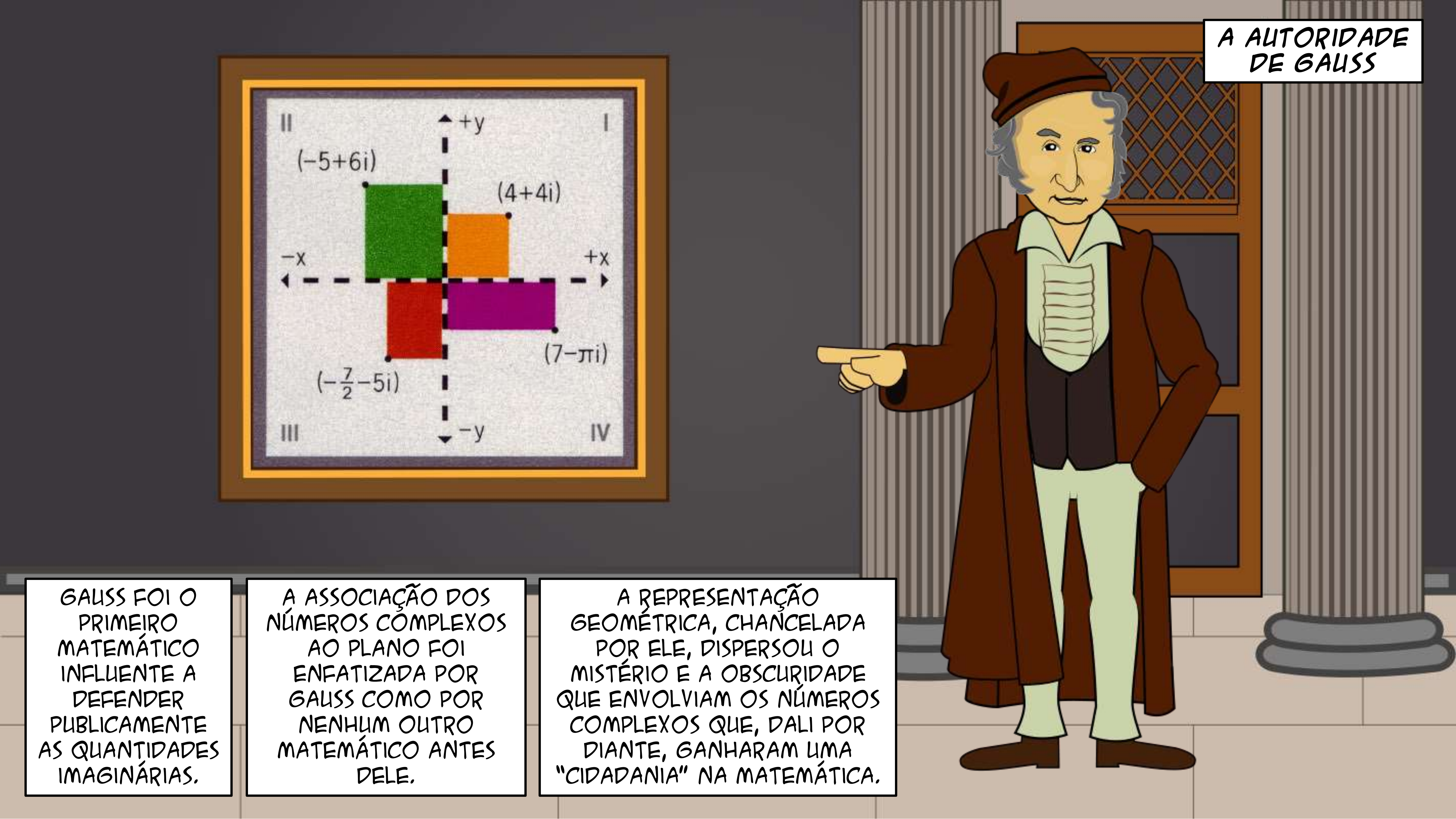

A BUSCA DE UM SIGNIFICADO
II
+y
I
(−5+6i)
(4+4i)
−x
+x
(7−πi)
(−7/2−5i)
III
−y
IV
MUITOS MATEMÁTICOS TIVERAM, DE FORMA INDEPENDENTE, A IDEIA DE REPRESENTAR OS NÚMEROS COMPLEXOS EM UM PLANO, DANDO UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA PARA ELES.
ESSA INTERPRETAÇÃO FOI PROPOSTA ANTES POR WALLIS, ARGAND, CARNOT, BUÉE E WESSEL.


A BUSCA DE UM SIGNIFICADO
II
+y
I
(−5+6i)
(4+4i)
−x
+x
(7−πi)
(−7/2−5i)
III
−y
IV
ESSES TRABALHOS, NO ENTANTO, NÃO TIVERAM IMPACTO E PERMANECERAM DESCONHECIDOS.
FOI NECESSÁRIO O PRESTÍGIO DE GAUSS PARA TORNAR CONHECIDA E ACEITA A REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS.
A PUBLICAÇÃO EM 1831 DA REPRESENTAÇÃO DOS COMPLEXOS COMO PONTOS NO PLANO OCORREU EM CONEXÃO COM SEU TRABALHO SOBRE A TEORIA DO NÚMEROS E SÓ SE DEU APÓS LONGA REFLEXÃO E CONVENCIMENTO INTERIOR.

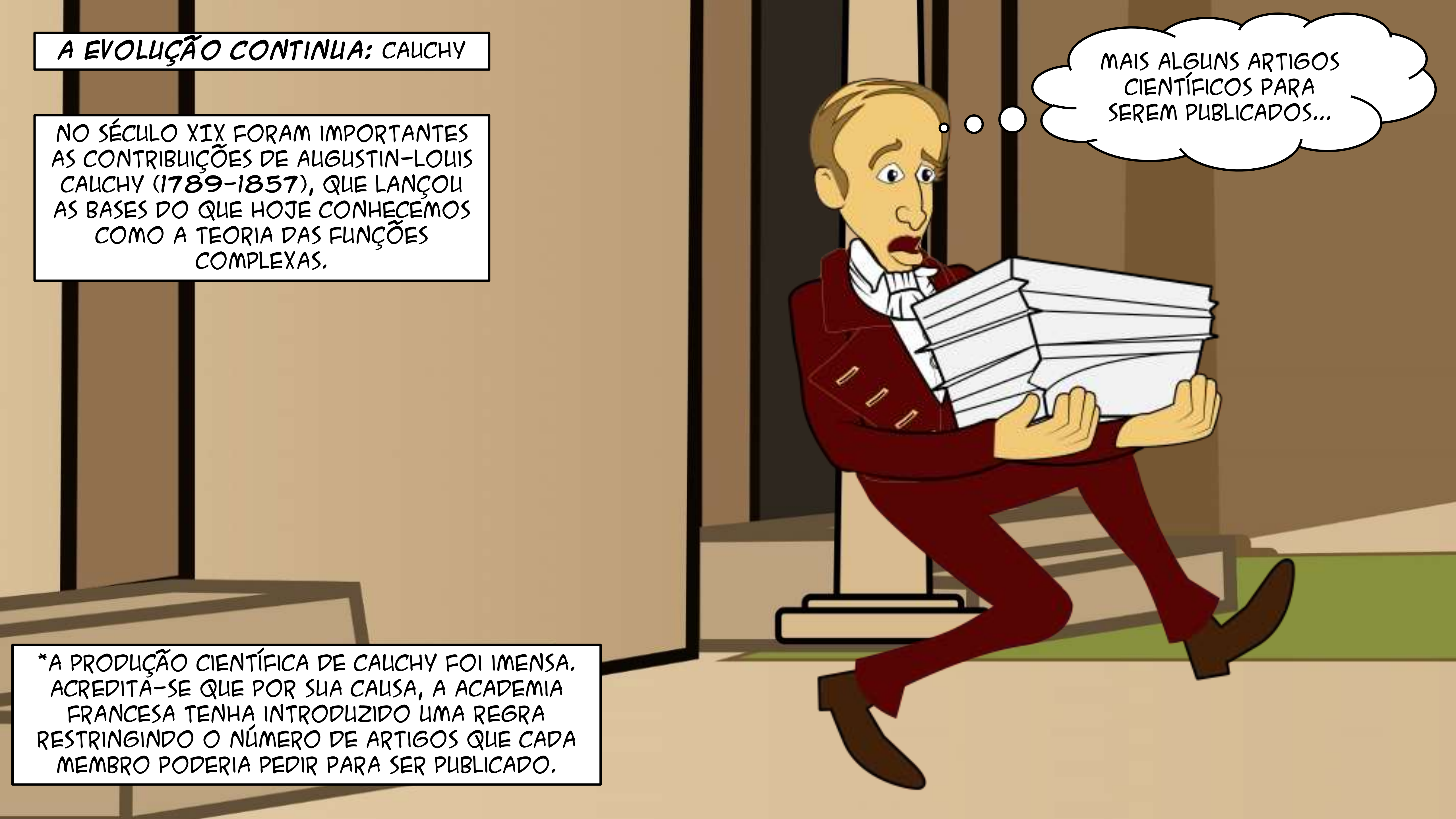
A AUTORIDADE DE GAUSS

FOI ELE TAMBÉM QUEM USOU PELA PRIMEIRA VEZ A EXPRESSÃO "NÚMEROS COMPLEXOS".

O USO DA LETRA i PARA REPRESENTAR A UNIDADE IMAGINÁRIA FOI PROPOSTO POR EULER, MAS SÓ FOI ADOTADO PELA COMUNIDADE MATEMÁTICA DEPOIS QUE GAUSS COMEÇOU A USÁ-LA.

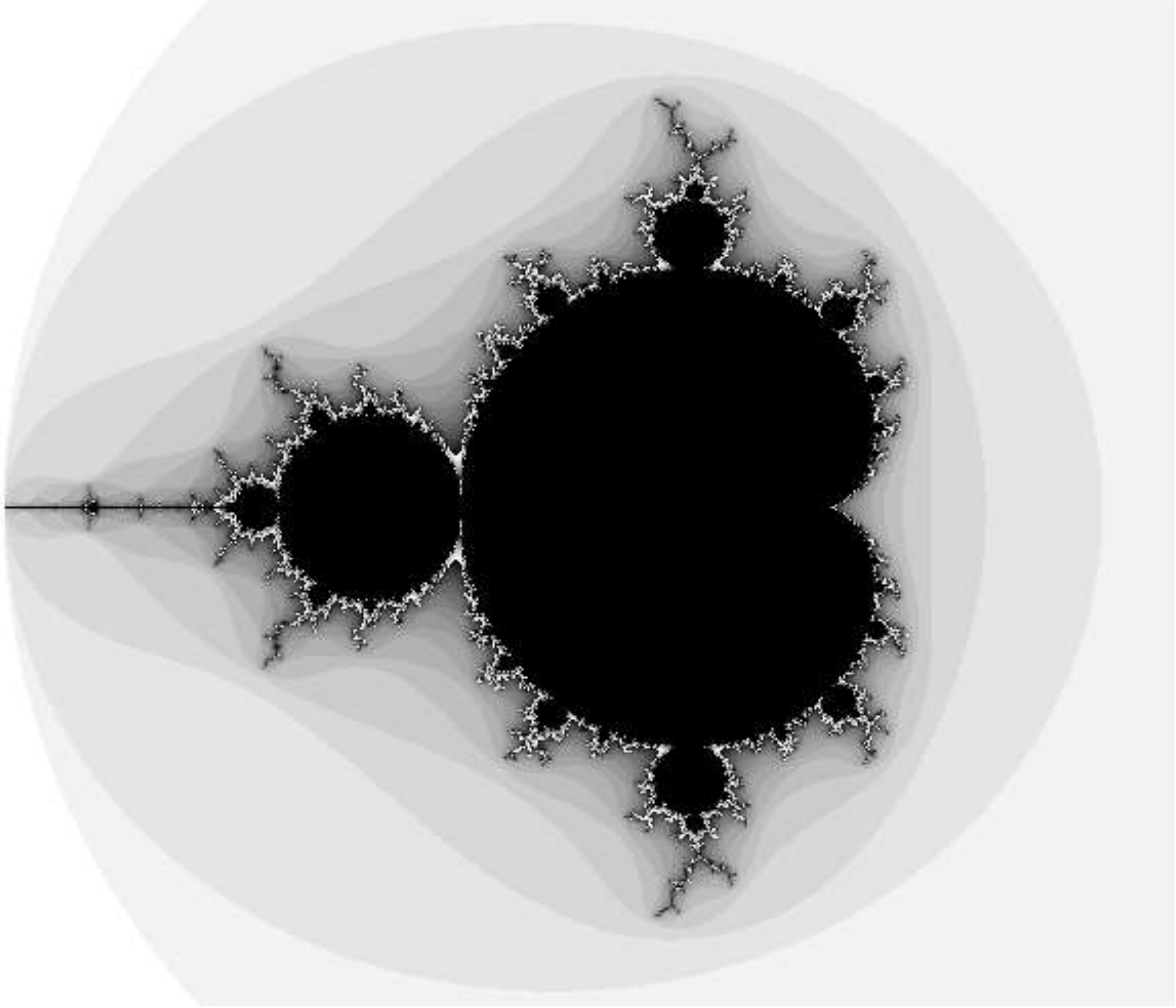

A AUTORIDADE DE GAUSS
II
I
III
IV
+y
−y
−x
+x
(−5+6i)
(4+4i)
(7−πi)
(−7/2−5i)
GAUSS FOI O PRIMEIRO MATEMÁTICO INFLUENTE A DEFENDER PUBLICAMENTE AS QUANTIDADES IMAGINÁRIAS.
A ASSOCIAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS AO PLANO FOI ENFATIZADA POR GAUSS COMO POR NENHUM OUTRO MATEMÁTICO ANTES DELE.
A REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA, CHANCELADA POR ELE, DISPERSOU O MISTÉRIO E A OBSCURIDADE QUE ENVOLVIAM OS NÚMEROS COMPLEXOS QUE, DALI POR DIANTE, GANHARAM UMA "CIDADANIA" NA MATEMÁTICA.

O PROBLEMA DA TERMINOLOGIA
EM 1831 GAUSS JÁ ALERTAVA PARA UM PROBLEMA QUE PERSISTE ATÉ HOJE: O USO DA PALAVRA "IMAGINÁRIO" LEVA AS PESSOAS A ACREDITAREM QUE SE TRATA DE ALGO FICTÍCIO E A PROCURAREM POR INTERPRETAÇÕES FÍSICAS DESCONECTADAS DA REALIDADE PARA ESSES NÚMEROS.
QUE ESTE ASSUNTO (NÚMEROS IMAGINÁRIOS) ATÉ AGORA TENHA SIDO CERCADO POR MISTERIOSA ESCURIDÃO DEVE SER ATRIBUÍDO EM GRANDE PARTE A UMA TERMINOLOGIA MAL ADAPTADA. SE, POR EXEMPLO, +1, -1, E $\sqrt{-1}$ TIVESSEM SIDO CHAMADOS DE DIRETO, INVERSO E LATERAL, EM VEZ DE POSITIVO, NEGATIVO E IMAGINÁRIO (OU, PIOR AINDA, DE IMPOSSÍVEL), TAL OBSCURIDADE ESTARIA FORA DE QUESTÃO.


A EVOLUÇÃO CONTINUA: CAUCHY
NO SÉCULO XIX FORAM IMPORTANTES AS CONTRIBUIÇÕES DE AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857), QUE LANÇOU AS BASES DO QUE HOJE CONHECEMOS COMO A TEORIA DAS FUNÇÕES COMPLEXAS.
MAIS ALGUNS ARTIGOS CIENTÍFICOS PARA SEREM PUBLICADOS...
*A PRODUÇÃO CIENTÍFICA DE CAUCHY FOI IMENSA. ACREDITA-SE QUE POR SUA CAUSA, A ACADEMIA FRANCESA TENHA INTRODUZIDO UMA REGRA RESTRINGINDO O NÚMERO DE ARTIGOS QUE CADA MEMBRO PODERIA PEDIR PARA SER PUBLICADO.


A EVOLUÇÃO CONTINUA
TAMBÉM FORAM NOTÁVEIS AS CONTRIBUIÇÕES DE WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865) QUE INTRODUZIU UMA DEFINIÇÃO ALGÉBRICA FORMAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS COMO PARES ORDENADOS DE NÚMEROS REAIS.
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
HAMILTON DESCOBRIU TAMBÉM OS QUATÉRNIOS (UMA EXTENSÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS), MAS ISSO JÁ É OUTRA HISTÓRIA.

NO SÉCULO XX OS NÚMEROS COMPLEXOS SE TORNARAM ONIPRESENTES NA FÍSICA.



OS COMPUTADORES TORNARAM MAIS SIMPLES VISUALIZAR AS FUNÇÕES COMPLEXAS. EM 1979 BENOIT MANDELBROT (1924-2010) GEROU A IMAGEM DO QUE MAIS TARDE VIRIA A SER CHAMADO DE UM FRACTAL DO CONJUNTO DE MANDELBROT (UMA TRANSFORMAÇÃO QUE ENVOLVE NÚMEROS COMPLEXOS).